

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ДИСПЕРСИИ
ПО ЭМПИРИЧЕСКИМ ДАННЫМ

© 1994 г. А. С. Орлов, Н. В. Кирпичникова

Институт водных проблем Российской академии наук
107078 Москва, ул. Ново-Басманная, 10

Поступила в редакцию 13.08.92 г.

Излагается подход к расчету распространения растворенной пассивной примеси, при котором этот процесс рассматривается как одномерная дисперсия. Приводится способ вычисления коэффициента дисперсии по дисперсии скорости в створах на различных объектах, в том числе и на проточном Иваньковском водохранилище.

Уравнение одномерной адвективной дисперсии широко применяется при расчетах распространения примеси в реках и каналах [5, 10] на значительном удалении от ее источника. Здесь рассматривается оценка коэффициента продольной дисперсии D_x при случайном блуждании частиц (элементов жидкости) в потоке.

Уравнение, описывающее распространение примеси в водотоке, имеет вид [4]

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \hat{U} \frac{\partial p}{\partial x} = D_x \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где p – плотность вероятностей распределения примеси массы M вдоль оси потока, x – криволинейная ось координат (в данном случае совпадающая с фарватером), \hat{U} – средняя по сечению скорость течения.

Решение этого уравнения в случае мгновенного точечного выпуска примеси в момент времени $t = 0$ в точке x_0 и при $p \rightarrow 0$, если $x \rightarrow \infty$, известно:

$$p = \frac{1}{2\sqrt{\pi D_x t}} \exp \left\{ -\frac{[x_1 - x(x_0, t)]^2}{4D_x t} \right\}, \quad (2)$$

где $x(x_0, t)$ – створ, в который попадает примесь, двигаясь со средней по сечению водотока скоростью, x_1 – координата точки наблюдения.

Если предположить, что вся масса примеси M в начальный момент времени равномерно распределена в слое единичной толщины в ств. x_0 , то $C_0 = M/S(x_0)$, где C_0 – условная начальная концентрация, $S(x)$ – площадь сечения водотока в ств. x . Учитывая, что в реальном водотоке $S(x) \neq \text{const}$, получаем

$$C(x, t) = C_0 p(t) S(x_0) / S(x). \quad (3)$$

Чтобы использовать уравнения (1) – (3), необходимо соблюдать следующие условия:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial D_x}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

$$p \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} \ll \hat{U} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (5)$$

где Q – расход воды в сечении русла.

В (2) D_x может быть рассчитан по результатам измерения концентрации примеси (искусственной или естественной) [5], переносимой потоком, либо по заданным в сечении водотока распределениям скоростей течения и коэффициентов турбулентного обмена с помощью общепринятых формул Х. Фишера и Дж. Эльдера [5, 10, 13]:

$$D_x = -\frac{1}{S} \int_0^B [U(y) - \hat{U}] h(y) \int_0^y \frac{1}{\epsilon_y h(y')} \int_0^{y'} \times \\ \times [U(y'') - \hat{U}] h(y'') dy'' dy' dy, \\ \epsilon_y = 0.23 h U_*,$$

где U_* – динамическая, $U(y)$ – средняя по вертикали скорость потока, $h(y)$ – глубина в точке y , ϵ_y – коэффициент турбулентной диффузии по y . Скорость течения осреднена по времени и вклад турбулентной диффузии не учитывается. Чтобы воспользоваться формулами (6), необходимо задать весьма подробно распределения $U(y, z)$ и $h(y)$ в створе, что связано с техническими трудностями при натурных измерениях, поэтому, например, в [9] рекомендуется сочетать измерение $U(y, z)$ с расчетом, что позволяет уменьшить шаг интегрирования и повысить точность вычисления D_x .

Кроме этих двух методик при расчете D_x часто используются эмпирические формулы [1].

В большинстве случаев они могут быть представлены в виде

$$D_x = f(\lambda, \hat{U}, R, B),$$

где λ — коэффициент гидравлического трения (обычно вводится через динамическую скорость или уклон), R — гидравлический радиус, B — ширина водотока по поверхности (необязательный параметр).

Набор аргументов в этой формуле вполне достаточен для описания равномерных потоков (в этом случае практически полностью определяется турбулентный обмен). В реальных реках дисперсия примеси может быть сильно связана с формой русла в сечении и в плане плохо учтенными перечисленными параметрами. Авторы [3, 14] пытались учесть влияние формы русла в сечении и в плане, но полученные ими результаты не были распространены.

Применение уравнения (1) для описания процесса дисперсии основано на аналогии между диффузией и дисперсией, при этом определение коэффициентов диффузии (или дисперсии), как правило, основано на градиентной теории. Как известно, коэффициенты диффузии могут быть определены с помощью теории Тейлора через корреляцию смещений блуждающих частиц [11]. Подобные соотношения могут быть получены и для коэффициента дисперсии. Такой подход использовался в [13, 14].

Очевидно, что частица, находящаяся при $t = 0$ в точке $x = 0$, за время t сместится вдоль траектории по оси x на расстояние

$$x(t) = \int_0^t U(\tau) d\tau.$$

Домножая обе части равенства на $U(t)$ и учитывая, что

$$U(t)x(t) = \frac{1}{2} \frac{dx^2}{dt},$$

получим¹

$$\frac{1}{2} \frac{dx^2}{dt} = \int_0^t U(t)U(\tau) d\tau.$$

¹ Положив мгновенные значения скорости и расстояния равными $U + u'$ и $x + x'$ соответственно, после осреднения по вероятности получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dx^2}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dx'^2}{dt} &= \int_0^t U(t)U(\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^t u'(t)u'(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Здесь первый интеграл определяет адвекцию примеси в потоке, а второй — турбулентную диффузию.

Положив

$$d\tau = \frac{d\tilde{x}}{\hat{U}(\tilde{x})}, \quad \hat{x} = \int_0^t \hat{U}(\tilde{x}) d\tau, \quad \tilde{x} = \int_0^t \hat{U}(\tilde{x}) d\tau', \quad (7)$$

заменяем в предыдущей формуле переменные

$$\frac{1}{2} \frac{dx^2}{dt} = \int_0^{\hat{x}} \frac{U(\hat{x})U(\tilde{x})}{\hat{U}(\hat{x})} d\tilde{x}.$$

Осредним обе части полученного соотношения по сечению в ств. x :

$$\frac{1}{2} \frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} = \frac{1}{\hat{U}(\hat{x})} \int_0^{\hat{x}} \langle U(\hat{x})U(\tilde{x}) \rangle d\tilde{x}. \quad (8)$$

Здесь $\langle \rangle$ означают осреднение по сечению потока:

$$\begin{aligned} \langle U(\hat{x})U(\tilde{x}) \rangle &= \frac{1}{S(\hat{x})} \int_0^{Bh(y)} \int_0^{\tilde{x}} U(\hat{x})U(\tilde{x}) dz dy = \\ &= \frac{1}{S(\hat{x})} \int_0^{Bh(y)} \int_0^{\tilde{x}} U'(\hat{x})U'(\tilde{x}) dz dy + \hat{U}(\hat{x})\hat{U}(\tilde{x}) = \\ &= \sigma_u(\hat{x})\sigma_u(\tilde{x})r(\xi) + \hat{U}(\hat{x})\hat{U}(\tilde{x}), \end{aligned} \quad (9)$$

где $U' = U - \hat{U}$, $\xi = \hat{x} - \tilde{x}$, $r(\xi)$ — аналог автокорреляционной функции, $\sigma_u(\hat{x})$ и $\sigma_u(\tilde{x})$ — среднеквадратические отклонения скорости воды от $\hat{U}(\hat{x})$ и $\hat{U}(\tilde{x})$ в сечениях \hat{x} и \tilde{x} соответственно.

Пусть $\hat{U}(\hat{x}) \approx \hat{U}(\tilde{x})$ и $\sigma_u(\hat{x}) \approx \sigma_u(\tilde{x})$, т.е. скорость изменяется незначительно при значениях $|\hat{x} - \tilde{x}|$ приблизительно до $2L$. Тогда

$$\frac{1}{2} \frac{d(\hat{x}^2 + \sigma_x^2)}{dt} = \frac{\sigma_u^2(\hat{x})}{\hat{U}(\hat{x})} \int_0^{\hat{x}} r(\xi) d\tilde{x} + \hat{U}(\hat{x}) \int_0^{\hat{x}} \hat{U}(\tau) d\tau,$$

где σ_x^2 — дисперсия распределения примеси вдоль оси x .

Так как

$$\frac{1}{2} \frac{d\hat{x}^2}{dt} = \hat{U}(\hat{x}) \int_0^{\hat{x}} \hat{U}(\tau) d\tau = \hat{U}(\hat{x})\hat{x},$$

то

$$D_x = \frac{1}{2} \frac{dx^2}{dt} = \frac{\sigma_u^2(\hat{x})}{\hat{U}(\hat{x})} \int_0^{\hat{x}} r(\xi) d\tilde{x} \quad (10)$$

и, если при $\hat{x} \rightarrow \infty$ интеграл от $r(\xi)$ в (10) стремится к конечному пределу L , или

$$D_x = \sigma_u^2 \frac{L}{\hat{U}(\hat{x})}. \quad (11)$$

Такое представление накладывает определенные ограничения на поле скорости: при $\hat{U} \rightarrow 0$ выражение (11) теряет смысл.

Параметр L является масштабом дисперсии и может быть истолкован как минимальное расстояние между створами, начиная с которого распределения скоростей в этих створах можно считать независимыми. Вычислить $r(\xi)$ непосредственно невозможно, поэтому естественно попытаться связать величину L с одним из масштабов русловых форм, например со средней протяженностью излучин или радиусом корреляции автокорреляционной функции отклонений тальвега от условий оси [2]. В общем случае масштаб L может зависеть от многих параметров (например, от фрактальной размерности [7]), в том числе характеризующих картину русла в плане.

В [2] измерялись отклонения фарватера Нижней Волги от условной оси и вычислялась их автокорреляционная функция $r(\xi)$ вдоль этой оси. Соответствующий интегральный масштаб, рассчитанный до первого нуля $r(\xi)$, оказался приближенно равным $5\bar{B}$ (\bar{B} – средняя ширина русла по поверхности). Средняя протяженность излучин равнинных рек обычно оценивается [7] величиной $(5 - 7)\bar{B}$. Поскольку поперечный профиль скорости на протяжении излучины полностью прерастраивается, выбор ее длины в качестве масштаба дисперсии кажется оправданным. При формальном переходе к прямому руслу в этом случае $L \rightarrow \infty$, а $r(\xi) \rightarrow \text{const}$, так как распределение скорости во всех сечениях одинаково. Для принятых условий из (10) для прямого канала получим

$$D_x \approx \frac{\sigma^2(\hat{x})}{\hat{U}(\hat{x})} r\hat{x}. \quad (11a)$$

При ламинарном течении $r = 1$. Физическая определенность такого перехода также служит доводом в пользу выбора масштаба L , равного средней длине излучины.

В дальнейшем выражение $L \sim 5\bar{B}$ принято в качестве ориентировочного для равнинных рек с ограниченным меандрированием. Однако такой способ вычисления L необходимо проверить на экспериментальном материале.

Дисперсию скорости в створе, также входящую в (11), можно определить по формуле

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{S} \int_0^{\bar{B}h(y)} \int [U(y, z) - \hat{U}]^2 dz dy, \quad (12)$$

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{S} \int_0^{\bar{B}h(y)} \int [U(x, y) - U(y)]^2 dz dy + \frac{1}{B} \int_0^B [U(y) - \hat{U}]^2 dy. \quad (12a)$$

В (12a) первый интеграл определяет дисперсию распределения скорости по вертикали, второй – по ширине.

Для прямой экспериментальной проверки приведенной методики необходимо располагать результатами измерений поля скорости по сечениям, коэффициента дисперсии, полученного с помощью трассеров, и достаточно подробным планом ряда рек и каналов. К сожалению, такими данными мы не располагаем, поэтому контрольные расчеты для рассматриваемых объектов осуществлялись с помощью (6), если это было возможно, и эмпирических формул [1].

По данным, приведенным в [1], оценим изменчивость отношения L/B , предположив, что рассматриваемые потоки плоские с профилем скорости

$$U(y, z) = (1 + \alpha)U(y)[z/h(y)]^\alpha, \quad (13)$$

где α – показатель степени, который соответствует суммарному в сечении реки трению и определяется зависимостью [8]

$$\alpha = U_* / \kappa \hat{U}, \quad (14)$$

$\kappa = 0.4$ – постоянная Кармана.

С помощью соотношений (12) – (14) получим

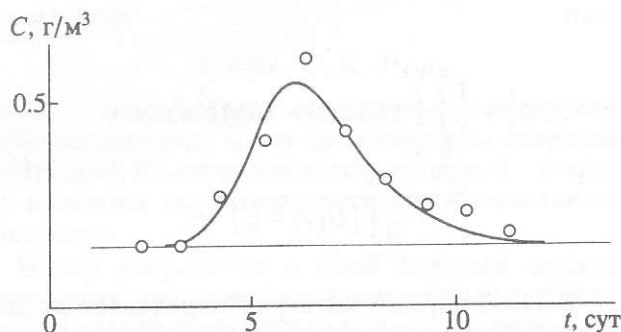
$$\sigma_u^2 = (\alpha^2 \hat{U}^2) / (1 + 2\alpha), \quad L = D_x / \sigma_u^2. \quad (15)$$

Таким образом, L/B ([1], табл. 2) изменяется приблизительно от 4 до 20, причем для прямых потоков – от 17 до 20. В этой таблице $D_x/RU_* \in [9.8; 558]$.

Далее был выбран объект (р. Педедзе [6]) с подробно промеренными в сечении полем скорости и профилем дна, для которого D_x рассчитывался по (6) при

$$\varepsilon_y = 0.23RU_*.. \quad (16)$$

С помощью измеренных значений $U(y, z)$ методом наименьших квадратов определялся показатель степени α (в логарифмическом приближении) в предположении справедливости закона распределения скорости (13). Динамическая скорость может быть определена по формуле (14), в которой использовалось среднеквадратическое значение α (осреднение осуществлялось по ширине реки). В результате было получено, что $D_x = 13.3 \text{ м}^2/\text{с}$.



Изменение во времени концентрации фосфора в ств. д. Плоски. Точки — эксперимент, кривая — расчет.

С помощью этих данных вычисления осуществлялись также по эмпирической формуле

$$\frac{D_x}{RU_*} = 0.88 \left(\frac{\hat{U}}{U_*} \right)^{0.37} \left(\frac{B}{R} \right)^{1.49}, \quad (17)$$

рекомендованной в [1] при $B \sim 60 - 70$ м. В результате $D_x = 13.1 \text{ м}^2/\text{с}$.

Вычисленный по (11), (12) при $L = 5B$ коэффициент дисперсии² в этом случае равен $12 \text{ м}^2/\text{с}$.

Как видно, результаты трех вариантов расчета D_x весьма близки.

По результатам измерений, проведенных на р. Киржач (подробное описание эксперимента дано в [10, гл. 5]), D_x рассчитывался по (11), (12) и (17) при $L = 5B$. Полученные значения коэффициентов дисперсии 2.9 и $3.5 \text{ м}^2/\text{с}$ с учетом ограниченности применения эмпирических формул и условности выбора L удовлетворительно согласуются одно с другим. Не исключено также, что в этом случае $L > 5B$.

Для Иваньковского водохранилища расчеты D_x осуществлялись по результатам измерения расходов в восьми створах: г. Дубна ($x = 0$), о. Клиницы ($x = 10.2$ км), г. Корчева³ ($x = 18.4$ км), г. Конаково ($x = 36.6$ км), д. Плоски ($x = 42.4$ км), о. Низовка ($x = 53.7$ км), с. Городня ($x = 70.4$ км), г. Эммаус ($x = 93.4$ км).

Расстояния определены от ств. Дубна по фарватеру с помощью лоцманской карты.

На участке г. Эммаус–с. Городня практически реализуется режим речного течения, поэтому здесь можно воспользоваться эмпирической формулой (для широких русел) [1]

$$\frac{D_x}{RU_*} = 2138 \left(\frac{U_*}{\hat{U}} \right)^{1.63}. \quad (18)$$

² При вычислении интеграла (6) использовалась сплайн-интерполяция профилей скорости и дна. Шаг интегрирования, обеспечивающий необходимую точность, $< B/200$, т.е. существенно меньше рекомендованного в [8] значения $B/20$. Интеграл (12) вычислялся методом трапеций.

³ Город полностью затоплен.

При определении U_* по таблицам выбирался коэффициент шероховатости (0.03 - 0.06), а расчет осуществлялся по формулам Маннинга и Шези [12]. Если принять, что среднее для указанного интервала значение коэффициента шероховатости равно 0.045, то $D_x = 7.9 \text{ м}^2/\text{с}$.

Согласно материалам Конаковского краеведческого музея, ширина русла реки в межень в конце XIX в. на участке выше с. Городня составляла ~ 160 м, т.е. $L \sim 800$ м при $L/B \approx 5$. В расчетах эта величина была оценочной, так как естественно предположить, что русло и пойма реки сформировались до создания водохранилища.

Коэффициент дисперсии в ств. г. Эммаус, вычисленный по (11), (12) при $L = 800$ м, равен $8.5 \text{ м}^2/\text{с}$ (среднее значение).

Аналогично (по (11), (12) при $L = 800$ м) значение D_x было вычислено и в других створах. Разброс результатов этих вычислений оказался значительным. Очевидно, это связано с возникновением в водохранилище циркуляционных течений, ускоряющих перемешивание водных масс и увеличивающих дисперсию σ_u^2 . Наибольший разброс D_x получился в створах о. Клиницы и г. Корчева (наиболее сложный широкий участок водохранилища). В ств. г. Дубна разброс несколько уменьшается (сказывается организующее влияние водослива). Очевидно, что наиболее простая картина течений реализуется при проточном установившемся режиме течения, чему должно соответствовать минимальное значение дисперсии скорости и, следовательно, D_x .

Коэффициенты дисперсии, отобранные в соответствии с этим принципом, имеют следующие значения: 10.6 (г. Дубна), 11.1 (о. Клиницы), 17 (г. Корчева), 18.0 (г. Конаково), 15.5 (д. Плоски), 19 (о. Низовка), $12 \text{ м}^2/\text{с}$ (с. Городня). Среднее по длине водохранилища (г. Дубна–г. Эммаус) значение D_x равно $14 \text{ м}^2/\text{с}$.

Еще одна оценка D_x была получена по наблюдавшемуся в апреле в 1984 г. в ств. д. Плоски кратковременному всплеску концентрации общего фосфора⁴ (рисунок). Предполагалось, что этот импульс сформировался в Шошинском заливе в результате начавшегося паводка на реках Шоше и Ламе, текущих с юга, и его дисперсия намного меньше дисперсии распределения, наблюдавшегося в ств. д. Плоски.

Оценка была выполнена по (2), (3) методом наименьших квадратов. При этом величина $C(x, t) - C_{\min}$ нормировалась на максимальное наблюдавшееся значение ($x_1 = x(x_0 t)$) и результат логарифмировался ($C_{\min} = 0.021 \text{ г/м}^3$ — фоновая концентрация фосфора).

⁴ Учитывая значительное время добегания и низкую температуру воды ($\sim 0^\circ\text{C}$), при вычислении D_x можно приближенно считать фосфор не реагирующей примесью.

Влияние распределения скорости течения \hat{U} вдоль водохранилища учитывалось следующим образом.

При установившемся режиме и в отсутствие сильного ветра поле скоростей Иваньковского водохранилища определяется расходом воды через плотину Q . В силу малой боковой приточности (<10%) на рассматриваемом участке этот расход можно считать независимым от x , в то же время скорость течения \hat{U} плавно убывает при приближении к плотине.

По данным измерений расходов в названных выше створах была подобрана функция

$$\hat{U}(x, Q) = a_0 + a_1x + a_2Q + a_3x^2 + a_4Q^2 + a_5xQ, \quad (19)$$

где x – расстояние по фарватеру, отсчитываемое от ств. г. Дубна.

Если $\hat{U}(x, Q)$ выражено в см/с, x – в км, а Q – в м³/с, то $a_0 = 2.423$, $a_1 = -3.790 \times 10^{-2}$; $a_2 = -6.630 \times 10^{-3}$, $a_3 = 9.296 \times 10^{-4}$, $a_4 = 2.469 \times 10^{-5}$, $a_5 = 1.978 \times 10^{-4}$.

Аппроксимация (19) удовлетворительна (среднеквадратическое отклонение для всех створов составляет 1.35 см/с) при $Q \in [60, 800]$. Так как $Q(x) = \hat{U}(x, Q) S(x, Q)$, то выражение (19) определяет также и сглаженное значение $S(x, Q)$, необходимое для вычисления концентрации по (3):

$$S(x_0)/S(x) = \hat{U}(x)/\hat{U}(x_0).$$

Среднее время добегания между створами x_0 и x_1 определяется соотношением

$$t = \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\hat{U}(x, Q)}$$

или с учетом (19)

$$t = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \arctg \frac{2a_3x + a_1 + a_5Q}{\sqrt{\Delta}} \Big|_{x_1}^{x_0}, \quad (20)$$

где $\Delta = 4a_3(a_0 + a_2Q + a_4Q^2) - (a_1 + a_5Q)^2$.

Примесь, выпущенная при $t = 0$ в ств. x_0 , достигает за время t створа

$$x(x_0, t) = \frac{\sqrt{\Delta} \operatorname{tg}(\tilde{t}' - t\sqrt{\Delta}/2) - (a_1 + a_5Q)}{2a_3}, \quad (21)$$

где $\tilde{t}' = \arctg[(2a_3x_0 + a_1 + a_5Q)/\sqrt{\Delta}]$.

Коэффициент дисперсии (по распределению концентрации фосфора), вычисленный с помощью рассмотренной методики с применением (2), (3), (21), равен 13.6 м²/с. Условный центр массы растворенного фосфора при $t = 0$ считался расположенным в 65 км от ств. г. Дубна, а $Q =$

$= 150$ м³/с. Кривая, рассчитанная по (2), (3), (21), приведена на рисунке.

Оценка выполнения условий (5) при средних по x значениях производных, p и \hat{U} при удалении от источника на 25 км показала, что правая часть неравенства в несколько раз превышает левую (при больших удалениях от источника это отношение увеличивается). Если для всего водохранилища среднее значение D_x равно 14 м²/с, что хорошо согласуется с расчетом коэффициента дисперсии по распределению концентрации растворенного фосфора, то при рассматриваемом режиме течения выполняются и условия (4).

Таким образом, метод определения коэффициента продольной дисперсии по дисперсии скорости в створах дает в рассмотренных случаях удовлетворительный результат.

Авторы благодарят В.Д. Казмирука за помощь в работе над статьей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Быстров А.В., Клименко О.А. // Вод. ресурсы. 1990. № 5. С. 174.
2. Дебольский В.К., Долгополова Е.Н., Орлов А.С., Сеземан В.И. // Динамика течений и литодинамические процессы в реках, водохранилищах и окраинных морях. М.: Наука, 1991. С. 84.
3. Еременко Е.В. // Динамика и термика рек и водохранилищ. М.: Наука, 1984. С. 61.
4. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы математической физики. М.: Физматгиз, 1973. 351 с.
5. Кюнж Ж.А., Холли Ф.М., Вервей А. Численные методы в задачах речной гидравлики. М.: Энергоатомиздат, 1985. 355 с.
6. Лучшева А.А. Практическая гидрометрия. Л.: Гидрометеиздат, 1983. 424 с.
7. Никора В.И. Руслые процессы и гидравлика малых рек. Кишинев: Штиинца, 1992. 144 с.
8. Орлов А.С., Долгополова Е.Н., Дебольский В.К., Губеладзе Д.О. // Вод. ресурсы. 1988. № 2. С. 80.
9. Рогуневич В.П. Автоматизация математического моделирования движения воды и примесей в системах водотоков. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 264 с.
10. Фидман Б.А. Турбулентность водных потоков. Л.: Гидрометеиздат, 1991. 230 с.
11. Фрост У., Моулден Т. Турбулентность, принципы и применения. М.: Мир, 1980. 526 с.
12. Чоу В.Т. Гидравлика открытых каналов. М.: Стройиздат, 1969. 464 с.
13. Fisher H.B. // J. Hydraul. Div. ASCE. 1967. V. 93. № 6. P. 187.
14. Fukuoka S., Sayre W.W. // J. Hydraul. Div. ASCE. 1973. V. 23. № 1. P. 195.